

Kreisel aus Büroklammern

C. Ucke

Das Spiel mit dem Kreisel gehört zu den kindlichen Grunderfahrungen, die theoretischen Hintergründe werden dazu nicht benötigt. Physiker befassen sich dagegen seit jeher wissenschaftlich mit der Thematik, zu der Studenten reizvolle und auch schwierige Aufgaben bearbeiten müssen. Der japanische Professor Takao Sakai hat einige genial einfache Kreiselkonstruktionen erdacht, die Kinder und Wissenschaftler gleichermaßen in den Bann ziehen können.

Wie läßt sich aus einer Büroklammer ein Kreisel herstellen, der außerdem eine gewisse Attraktivität aufweist, ein möglichst großes Trägheitsmoment hat und physikalisch etwas hergibt? Die Büroklammer steht hier nur stellvertretend für ein leicht verfügbares, kurzes und dünnes Drahtstück definierter Länge. Takao Sakai aus Japan hat dazu einige hübsche Ideen entwickelt [1]. Ich werde hier einen Auszug aus seiner Publikation darstellen und einige eigene Gedanken dazutun (Abb. 4, 5 und anschließende Teile).

Die Realisierung eines derartigen Kreisels ist nicht so schwierig. Man biege eine Büroklammer zunächst zu einem gerade Stück

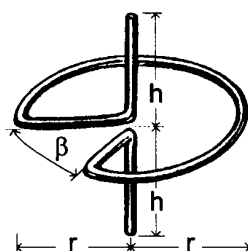


Abb. 1: Eine Büroklammer kann so zu einem Kreisel gebogen werden.

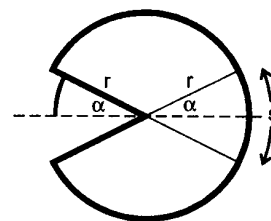


Abb. 2: Der Büroklammerkreisel in der Aufsicht.

Draht und dann derart in einem Kreisbogen mit zwei Speichen um eine Achse, daß der Schwerpunkt genau in der Achse liegt (Abb. 1). Der Winkel β muß dazu eine Größe von $53,13^\circ$ aufweisen. Die Berechnung dieses Winkels ist eine reizvolle Aufgabe für Physikstudenten in den ersten Semestern, dagegen ist der Bau und das Laufenlassen des Kreisels eine unterhaltsame Übung sowohl für Wissenschaftler als auch für Kinder [2].

In Abb. 2 ist der Kreisel in Aufsicht dargestellt. Ist der Winkel zwischen den Speichen zu groß oder zu klein, liegt der Schwerpunkt offensichtlich nicht im Kreismittelpunkt. Zur Berechnung des notwendigen Winkels kann man sich auf die Betrachtung des Schwerpunkts der beiden Speichen und des gegenüberliegenden Kreisbogenstücks s beschränken. Die anderen Teile des Kreisbogens sind symmetrisch zum Mittelpunkt und brauchen deswegen nicht berücksichtigt zu werden. Zur bequemeren Berechnung werde der halbe Speichenwinkel α eingeführt.

In Abb. 3 sind die Speichen und der Kreisbogen s herausgehoben. Der Koordinatenursprung liege im Kreismittelpunkt. Der Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Kreisbogens und dem Kreismittelpunkt sei x_1 . Da der Kreisbogen s symmetrisch zur x -Achse liegt, ergibt sich der Schwerpunkt des Bogens aus dem Linienintegral

$$x_1 = \frac{1}{s} \int x ds = \frac{1}{s} \int_{-\alpha}^{\alpha} r \cos \varphi r d\varphi = \frac{2r^2}{s} \sin \alpha = \left(r \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$$

Die Masse des Kreisbogens läßt sich nach $m_1 = s\rho$ berechnen, wobei ρ die Dichte pro Längeneinheit ist. Bezüglich des Koordinatenursprungs ergibt sich damit das Moment $M_1 = m_1 x_1 = 2r^2 \rho \sin \alpha$. Der Schwerpunkt der Speichen liegt bei $x_2 = r/2 \cos \alpha$; die Masse ist $m_2 = 2r\rho$. Das von den Speichen bezüglich des Koordinatenursprungs bewirkte Moment folgt zu $M_2 = m_2 x_2 = r^2 \rho \cos \alpha$.

Aus der Gleichgewichtsbedingung $M_1 = M_2$ resultiert die überraschend einfache Bestimmungsgleichung $\tan \alpha = 0,5$, d. h. $\alpha = 26,565^\circ$. Der Winkel zwischen den Speichen ist folglich $\beta = 2\alpha = 53,13^\circ$.

Die vorhergehenden Betrachtungen erfordern Integralrechnung, die in Schulen nicht allgemein vorausgesetzt werden kann. Der Winkel α kann jedoch auch näherungsweise ohne Integral abgeschätzt werden, indem man den Kreisbogen durch eine Sehne ersetzt (Abb. 4). Der Schwerpunkt der Sehne ergibt sich aus dem Radius r zu $x_1 = r \cos \alpha$, die Masse zu $m_1 = 2a_1 \rho = 2r\rho \sin \alpha$. Das resultierende Moment folgt zu $M_1 = m_1 x_1 = 2r^2 \rho \sin \alpha \cos \alpha$. Setzt man wieder $M_1 = M_2$ (M_2 ist schon vorher bestimmt worden), er-

Dr. Christian Ucke, Technische Universität München, Physik Department E20, 85747 Garching, email: ucke@e20.physik.tu-muenchen.de

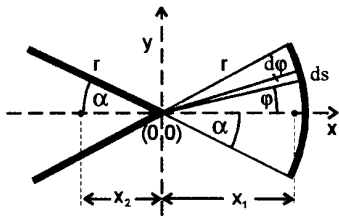


Abb. 3: Zur Berechnung des Schwerpunkts werden nur die Speichen und das gegenüberliegende Kreisbogenstück betrachtet.

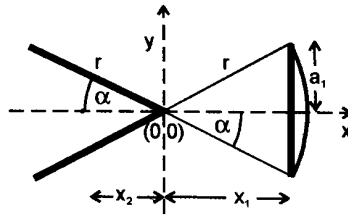


Abb. 4: Der Kreisbogen wird zur näherungsweisen Berechnung durch eine Sehne ersetzt.

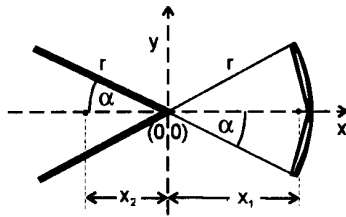


Abb. 5: Eine Näherung des Kreisbogens durch zwei Sehnenstücke ist schon fast optimal.

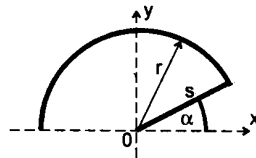


Abb. 6: Berechnung des Trägheitsmoments. Es wird nur die Hälfte des Kreises in Aufsicht in der xy-Ebene gezeigt.

gibt sich $\sin \alpha = 0,5$ bzw. $\alpha = 30^\circ$. Der Winkel ist jetzt etwas größer als der exakt berechnete, da der Schwerpunkt der Sehne näher zum Koordinatenursprung liegt.

Noch besser ist natürlich eine Näherung, bei der der Kreisbogen durch zwei Sehnenstücke ersetzt wird (Abb. 5). Die daraus abgeleitete transzendente Bestimmungsgleichung für α kann leicht numerisch gelöst werden. Das Ergebnis von $27,2^\circ$ liegt schon sehr nahe beim exakt berechneten Wert für α .

Mit Hilfe einer kleinen Flachzange kann so ein Kreisel aus einer Büroklammer hergestellt werden. Im Notfall geht es sogar mit den Fingern. Besonders geeignet sind Büro- bzw. Aktenklammern mit Kugelenden. Möchte man den oberen und den unteren Teil der Drehachse gleich lang und darüber hinaus so groß wie den Radius machen, ergibt eine kurze Rechnung, daß die Länge des oberen Teils etwa $1/10$ der Gesamtlänge der zu einem geraden Drahtstück gebogenen Büroklammer betragen muß. Das genaue Biegen des Kreisbogens und das Einhalten des korrekten Winkels zwischen den Speichen ist nicht ganz einfach. Glücklicherweise kommt es nicht so genau darauf an, da man durch nachträgliches Verbiegen des Drahtes den Schwerpunkt immer noch in die Achse bringen kann. Eine anspruchsvolle Aufgabe besteht darin, jedes Mitglied einer Gruppe derartige Kreisel herstellen zu lassen und dann zu vergleichen, welches Stück am besten läuft.

Falls der Schwerpunkt des Kreisels nicht in der Achse liegt, ist der Kreisel – statisch – nicht ausgewuchtet. Bei einem Autorad führen solche Unwuchten zu starken Belastungen der Lager, die sich jedoch ausglei-

chen lassen, indem man kleine Gewichte am Felgenreif anbringt. Beim Kreisel führen Unwuchten dagegen zu irregulären Bewegungen der Kreiselachse, die ja im Gegensatz zur Achse eines Autorades nicht in einem festen Lager läuft. Beim Kreisel läßt sich das – statische – Auswuchten durch ein geeignetes Verbiegen des Drahtes ebenfalls erreichen. Ein Rotationskörper ist dynamisch ausgewuchtet, wenn die Drehachse mit einer Hauptträgheitsachse übereinstimmt. Für die Kreisel ist diese Bedingung erfüllt, wenn die Drehachse senkrecht zu den in einer Ebene befindlichen Speichen und Kreisbogen orientiert ist.

Der Kreisel kann mit den Fingern bis auf einige tausend Umdrehungen pro Minute gebracht werden. Rotiert er schnell, sieht man nur noch einen freischwebenden Kreisring um die Achse. Die Drehzahl des Kreisels läßt sich grob aus folgender Überlegung abschätzen: Hält man die Kreiselachse zwischen Zeigefinger und Daumen, erreichen Finger bzw. Daumen etwa eine Geschwindigkeit von $v = 0,1$ m/s. Der Drahtdurchmesser beträgt etwa $d = 1$ mm, d. h. der Radius $r = 0,5$ mm. Daraus ergibt sich $\omega = v/r = 0,1 \text{ ms}^{-1}/0,5 \text{ mm} = 200 \text{ s}^{-1}$ bzw. $f = 200 \text{ s}^{-1}/2\pi = 32 \text{ s}^{-1} = 1900 \text{ U/m}$. Mit stroboskopischer Beleuchtung lassen sich sogar noch weit größere Drehzahlen bestätigen.

Der Sakai-Kreisel ist im Sinne der theoretischen Physik ein sogenannter unsymmetrischer Kreisel, d. h. die Trägheitsmomente in zwei zueinander senkrechten Richtungen in der xy-Ebene sind unterschiedlich ($I_x \neq I_y$). Diese Trägheitsmomente zu berechnen erfordert etwas mehr Aufwand. Aus Abb. 6 läßt sich ableiten:

$$I_x = 2 \left[\int_0^r (s \sin \alpha)^2 \rho ds + \int_\alpha^\pi (r \sin \varphi)^2 \rho r d\varphi + \frac{\rho h^3}{3} \right]$$

$$= 2\rho r^3 \left[\frac{\sin^2 \alpha}{3} + \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{r} \right)^3 \right]$$

$$I_y = 2 \left[\int_0^r (s \cos \alpha)^2 \rho ds + \int_\alpha^\pi (r \cos \varphi)^2 \rho r d\varphi + \frac{\rho h^3}{3} \right]$$

$$= 2\rho r^3 \left[\frac{\cos^2 \alpha}{3} + \frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{r} \right)^3 \right]$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse ist:

$$I_z = 2\rho r^3 \left(\frac{1}{3} + \pi - \alpha \right)$$

Für ein bestimmtes Verhältnis h/r ($1,62 \leq h/r \leq 1,68$) liegt I_z gerade zwischen I_x und I_y (Abb. 7). Eine freie Rotation eines derartigen Kreisels um diese Achse des mittleren Trägheitsmoments wäre dann nicht stabil. Das ist aber nur zu realisieren, indem man den rotierenden Kreisel in die Luft wirft, was gewisse Schwierigkeiten verursacht. Astronauten könnten das im schwerkraftfreien Raum natürlich optimal durchführen. Unsymmetrische Kreisel sind darüber hinaus mathematisch schwieriger zu behandeln. Wie kommt man also zu einem symmetrischen Kreisel? In Abb. 8 ist eine Lösung gezeigt, die ebenfalls auf Takao Sakai zurückgeht. Hat der Winkel α zwischen den Speichen gerade den richti-

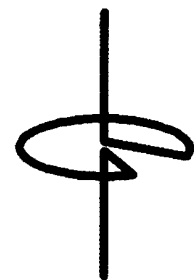


Abb. 7: Ein kritischer Sakai-Kreisel, bei dem gerade das mittlere Trägheitsmoment in der z-Achse liegt ($h = 1,65r$; maßstabsgerechte Abbildung).

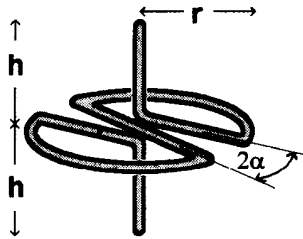


Abb. 8: Konstruktion eines symmetrischen Büroklammerkreisels.

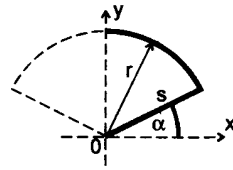


Abb. 9: Berechnung der Trägheitsmomente des symmetrischen Kreisels. Aufsicht auf ein Viertel des Kreisels.

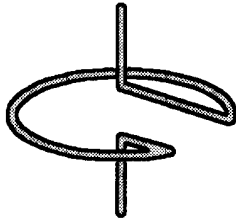


Abb. 10: Welchen Einfluß hat ein Abweichen der Speichen aus der Kreisebene?

gen Wert, gilt $I_x = I_y$. Die Berechnung dieses Winkels wird mit Abb. 9 verdeutlicht. In ganz ähnlicher Weise wie bei der vorhergegangenen Rechnung ergibt sich für ein Viertel des Kreisels für I_x und I_y :

$$I_x = \int_0^r (s \sin \alpha)^2 \rho ds + \int_\alpha^{\pi/2} (r \sin \varphi)^2 \rho r d\varphi = \rho r^3 \left[\frac{\sin^2 \alpha}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right]$$

$$I_y = \int_0^r (s \cos \alpha)^2 \rho ds + \int_\alpha^{\pi/2} (r \cos \varphi)^2 \rho r d\varphi = \rho r^3 \left[\frac{\cos^2 \alpha}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right]$$

Setzt man $I_x = I_y$ ergibt sich $\tan 2\alpha = 2/3$ bzw. $2\alpha = 33,69^\circ (= 0,588 \text{ rad})$.

Eine interessante und gut berechenbare Größe ist die kritische Rotationsfrequenz, unterhalb der symmetrische Kreisels bei Störungen nicht mehr stabil drehen [3]. Es gilt:

$$\omega_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{4mgh I_x}{I_z^2}} \quad \text{bzw.}$$

$$f_{\text{krit}} = \frac{\sqrt{mgh I_x}}{\pi I_z}$$

Von mir verwendete Büroklammern (Norica Büroklammern Nr. 575 mit Kugelenden) haben eine Masse $m=0,73 \text{ g}$ und $\rho=0,0753 \text{ g/cm}$. Unter der Voraussetzung

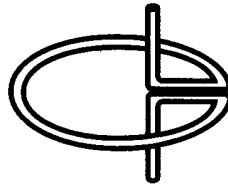


Abb. 11: Ein weiterer Büroklammerkreisels nach Sakai.

$h=r=0,087 \text{ cm}$, wie sie in Abb. 8 bezeichnet ist, errechnet sich

$$I_x = 4,0 \cdot 10^{-9} \text{ kgm}^2 \quad \text{bzw.}$$

$$I_z = \rho r^3 \left[\frac{4}{3} + 2(\pi - 2\alpha) \right] = 3,2 \cdot 10^{-8} \text{ kgm}^2$$

und $f_{\text{krit}} = 5,0 \text{ s}^{-1} = 300 \text{ U/min}$.

Diese Frequenz ist beim Andrehen mit den Fingern bequem zu überschreiten. Das ist die Voraussetzung dafür, daß der Kreisels überhaupt gut läuft.

Die konkrete Realisierung dieses Kreisels ist deswegen etwas schwieriger, weil die vielen Speichen einen Großteil der Gesamtlänge einer Büroklammer verbrauchen. Dadurch werden die Achse und der Gesamtkreisels etwas kompakt. Zur Abhilfe gehe man auf die nächste Büroklammergröße über. Zu groß dürfen derartige Kreisels aber nicht werden, da sie bei zu großem Trägheitsmoment nicht mehr gut anzudrehen sind. Es ist verblüffend, daß gerade Büroklammern eine optimale Größe aufweisen.

Sakai-Kreisels rufen geradezu weitere Fragen hervor. Welchen Effekt haben z. B. die abgerundeten Ecken, die sich notwendigerweise bei der Verwirklichung des Kreisels aus Draht ergeben? Welchen Einfluß auf den Winkel zwischen den Speichen hat es, wenn die Speichen aus der Kreisbogenebene symmetrisch nach oben bzw. unten abweichen (Abb. 10), wobei der Schwerpunkt in der Achse bleibt? Auch dies muß ja bei der Realisierung eines Kreisels aus Draht berücksichtigt werden. Lassen sich noch

weitere symmetrische Kreisels denken und konstruieren? Wie muß die Konstruktion eines Kreisels beschaffen sein, bei dem die Speichen beide parallel zur Achse hinlaufen (Abb. 11) und der Schwerpunkt – unsymmetrisch bezüglich des Kreisels – in der Achse liegt? Es lassen sich auch Kreisels konstruieren, die statt eines Kreisbogens eine quadratische Form aufweisen. Diese lassen sich dann sogar ohne Integrale berechnen.

Literatur

- [1] T. Sakai; Topics on tops which enable anyone to enjoy himself, Mathematical Sciences (Surikagaki = 数理科学) 271, 18 (1986)
- [2] W. Bürger; Der paradoxe Eierkocher, Birkhäuser Verlag, Basel 1995
- [3] F. Kuypers; Klassische Mechanik, Verlag VCH-WILEY, Weinheim 1997
- [4] Einige Bilder von rotierenden Sakai-Büroklammerkreiseln (animated gif-pictures) sind unter folgender Internet-Adresse anzusehen: <http://www.e20.physik.tu-muenchen.de/~cucke/ftp/lectures/sakaigir.htm>